ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΕΙΡΑ.

Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha \cdot \omega^{\nu-1}, \quad \alpha, \omega \in \mathbb{R}^*$$

ΛΥΣΗ

Θα βρούμε πρώτα το $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και μετά το $\lim \sigma_\nu$ όπου $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ ακολουθία μερικών αθροισμάτων

$$\sigma_\nu = \alpha + \alpha \cdot \omega + \alpha \cdot \omega^2 + \dots + \alpha \cdot \omega^{\nu-1} = \begin{cases} \nu \cdot \alpha, & \omega = 1 \\ \alpha \dfrac{\omega^\nu - 1}{\omega - 1}, & \omega \neq 1 \end{cases}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ:

1^{η}) $\omega = 1 \Rightarrow \lim \sigma_\nu = \lim \nu \cdot \alpha = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 0 \\ -\infty, & \alpha < 0 \end{cases}$, Αποκλίνει

2^{η}) $|\omega| < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{|\omega|} > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{|\omega|} = 1 + \theta, \theta > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{|\omega|^\nu} = (1+\theta)^\nu, \theta > 0 \Rightarrow$

Bernoulli

$\Rightarrow \dfrac{1}{|\omega|^\nu} \geq 1 + \nu\theta > \nu\theta \Rightarrow |\omega|^\nu < \dfrac{1}{\nu\theta} \Rightarrow \lim |\omega|^\nu = 0 \Rightarrow \lim \omega^\nu = 0$

Άρα, τότε $\lim \sigma_\nu = \lim \left(\alpha \cdot \dfrac{\omega^\nu - 1}{\omega - 1}\right) = \dfrac{\alpha}{1 - \omega}$, Συγκλίνει

3^{η}) $\omega = -1 \Rightarrow \sigma_\nu = \alpha - \alpha + \alpha - \dots + \alpha(-1)^{\nu-1} = \begin{cases} \alpha, & \alpha \text{ περιττός} \\ 0, & \alpha \text{ άρτιος} \end{cases}$

Άρα, $\sigma_{2\nu-1} \to \alpha$ & $\sigma_{2\nu} \to 0$

Επομένως, η $\sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ θα αποκλίνει

4^{η}) $\omega > 1 \Rightarrow \omega = 1 + \theta, \theta > 0 \Rightarrow \omega^\nu = (1+\theta)^\nu \geq 1 + \nu\theta > \nu\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \nu < \dfrac{1}{\theta} \cdot \omega^\nu$

Λόγω ότι $\lim \nu = +\infty$ και μέσω της ανισότητας (ενώ η ν φραγμένη και αύξουσα) τότε θα απειρίζεται θετικά $\Rightarrow \lim \omega^\nu = +\infty$.

Άρα, $\lim \sigma_\nu = \lim \left(\alpha \dfrac{\omega^\nu - 1}{\omega - 1}\right) = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 0 \\ -\infty, & \alpha < 0 \end{cases}$ Αποκλίνει

$5^{\eta})$ $\omega < -1 \Rightarrow \begin{cases} |\omega| > 1 \\ \omega = -|\omega| \end{cases} \Rightarrow \sigma_\nu = a\,\dfrac{1-\omega^\nu}{1-\omega} = a\,\dfrac{1-(-1)^\nu |\omega|^\nu}{1-\omega}$

Αφού, $|\omega|>1$ όπως στην (4^{η}) περίπτωση
$|\omega|^\nu \to \infty$ άρα $|\omega|^{2\nu} \to \infty$ & $|\omega|^{2\nu-1} \to \infty$

Για $a>0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{2\nu} \to -\infty \\ \sigma_{2\nu-1} \to +\infty \end{cases}$ και για $a<0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{2\nu} \to +\infty \\ \sigma_{2\nu-1} \to -\infty \end{cases}$

Τότε,

$$\sigma_{2\nu} = a\,\frac{1-|\omega|^{2\nu}}{1-\omega} = \begin{cases} -\infty, & a>0 \\ +\infty, & a<0 \end{cases}$$

και

$$\sigma_{2\nu-1} = a\,\frac{1+|\omega|^{2\nu-1}}{1-\omega} = \begin{cases} +\infty, & a>0 \\ -\infty, & a<0 \end{cases}$$

Άρα, η $\sigma_\nu, \nu\in\mathbb{N}$ αποκλίνει.

Συμπέρασμα:

- Όταν $|\omega|<1$ συγκλίνει
- Όταν $|\omega|\geq 1$ αποκλίνει

Σχόλιο:

Με αλλαγή του $1^{ου}$ όρου της σειράς αλλάζει και η τιμή του αθροίσματος της, δηλαδή:

$$\sum_{n=k}^{\infty} x^n = \frac{x^k}{1-x}, \text{ για } |x|<1.$$